

Azonosító  
jel:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

**ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2019. május 7.**

# MATEMATIKA

## EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

**2019. május 7. 8:00**

Időtartam: 240 perc

Pótlapok száma	
Tisztázati	
Piszkozati	

**EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTERIUMA**

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

---

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

## Fontos tudnivalók

1. A feladatok megoldására 240 perc fordítható, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.
2. A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.
3. A II. részben kitűzött öt feladat közül csak négyet kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladatra nem kap pontot.

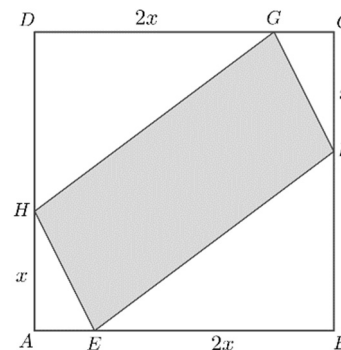
--

4. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!
5. **A megoldások gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!**
6. **Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetők legyenek!**
7. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás,  $n!$ ,  $\binom{n}{k}$  kiszámítása, a függvénytáblázatban feltehető táblázatok helyettesítése ( $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\operatorname{tg}$ ,  $\log$  és ezek inverzei), a  $\pi$  és az  $e$  szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
8. A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasságtétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, de az alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell. Egyéb tétel(ek)re való hivatkozás csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha az állítást minden feltételével együtt pontosan mondja ki (bizonyítás nélkül), és az adott problémában az alkalmazhatóságát indokolja.
9. A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!
10. A dolgozatot tollal írja, de az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül a ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.
11. Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén **egyértelműen jelölje**, hogy melyiket tartja érvényesnek!
12. Kérjük, hogy **a szürkített téglalapokba semmit ne írjon!**

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

## I.

1. Az  $ABCD$  négyzet oldalai 4 méter hosszúak. A négyzetbe az ábrán látható módon az  $EFGH$  paralelogrammát írjuk. Az  $AH$  és a  $CF$  szakasz hossza  $x$  méter, a  $BE$  és a  $DG$  szakasz hossza  $2x$  méter ( $0 < x < 2$ ).



- a) Igazolja, hogy a beírt paralelogramma területe ( $\text{m}^2$ -ben mérve):  $T(x) = 4x^2 - 12x + 16$ .
- b) Határozza meg az  $x$  értékét úgy, hogy a beírt paralelogramma területe a lehető legkisebb legyen!
- c) Számítsa ki a beírt paralelogramma szögeit, ha  $x = 1,25$ .

a)	4 pont	
b)	4 pont	
c)	6 pont	
<b>Ö.:</b>	14 pont	

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

---

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

2. a) Egy mértani sorozat negyedik tagja 12, a kilencedik tagja 384.  
Számítsa ki a sorozat első hat tagjának az átlagát, és az átlagtól mért átlagos abszolút eltérését!
- b) Hány olyan pozitív egész szám van, amelyben a számjegyek szorzata és összege is 12?

a)	6 pont	
b)	7 pont	
Ö.:	13 pont	

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

---

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

**3.** Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} + \left(\frac{1}{9}\right)^{x+1} = 324$

b)  $\sqrt{6x-24} = \sqrt{2x-7} - 1$

<b>a)</b>	6 pont	
<b>b)</b>	7 pont	
<b>Ö.:</b>	13 pont	



--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

---

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

4. Egy bűvész két egyforma „dobótetraédert” használ az egyik mutatványához. A dobótetraéder alakja olyan szabályos háromoldalú gúla, amelynek alapéle 6 cm hosszú, az oldalélei pedig  $30^\circ$ -os szöget zárnak be az alaplap síkjával.

a) Határozza meg a tetraéder térfogatát!

A tetraéderrel 1-est, 2-est, 3-ast vagy 4-est lehet dobni (a dobás eredményének az alsó lapon lévő számot tekintjük). Az 1-es, a 2-es, illetve a 3-as dobásának valószínűsége egyenlő. A 4-es dobásának valószínűsége ötször akkora, mint az 1-es dobásé.

b) Ha a bűvész a két dobótetraédert egyszerre dobja fel, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 6 lesz?

a)	6 pont	
b)	5 pont	
Ö.:	11 pont	

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

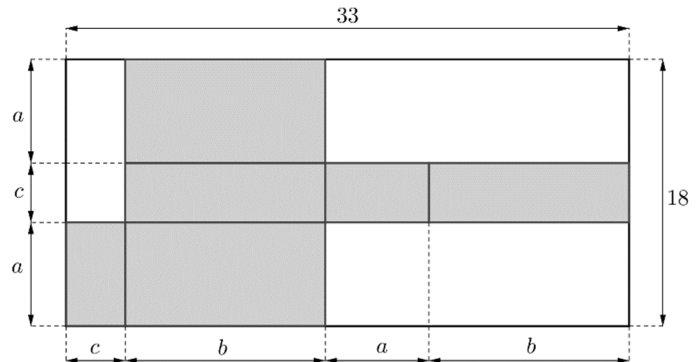
---

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

## II.

**Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.  
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!**

- 5.** Egy  $33 \times 18$  cm-es kartonlapból (kivágással, hajtogatással) téglatest alakú dobozt készítenek. A doboz (sötétre színezett) kiterített hálóját és méreteit az *ábra* szerint választják meg.



- a)** Határozza meg a doboz térfogatát, ha  $a = 7$  cm!
- b)** Hogyan kell megválasztani az  $a$ ,  $b$ ,  $c$  élek hosszát ahhoz, hogy a doboz térfogata maximális legyen?

Egy téglatest bármely három csúcsa egy háromszöget határoz meg.

- c)** A téglatest csúcsai által meghatározott háromszögek között hány olyan van, amelyek a síkja nem esik egybe a téglatest egyik lapjának síkjával sem?

<b>a)</b>	3 pont	
<b>b)</b>	9 pont	
<b>c)</b>	4 pont	
<b>Ö.:</b>	16 pont	

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

---

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

**Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.  
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!**

**6.** Egy egyenlő szárú háromszög oldalai hosszúságának átlaga 10, szórása  $3\sqrt{2}$ .

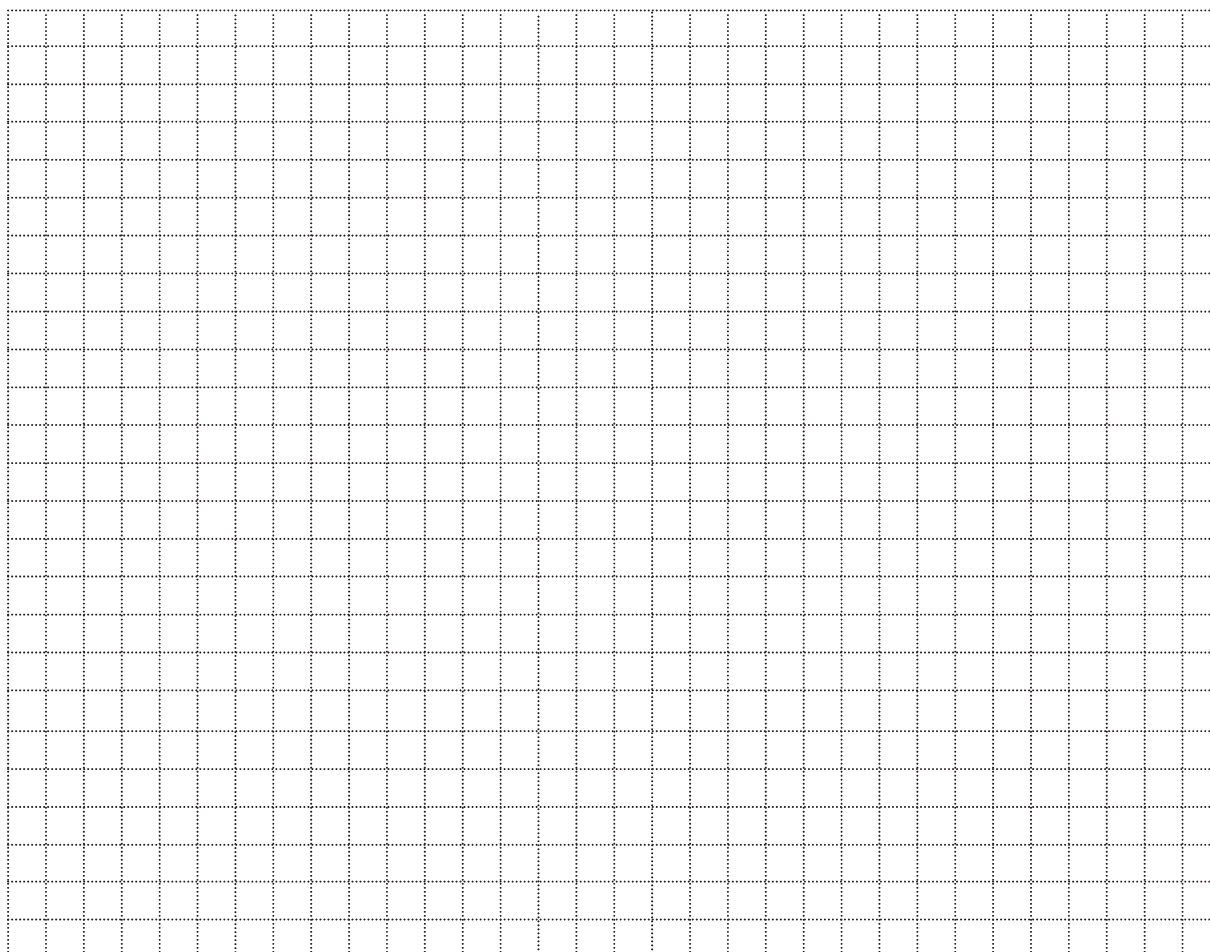
a) Határozza meg a háromszög oldalainak hosszát!

Egy háromszög csúcsai a derékszögű koordináta-rendszerben  $A(-6; 0)$ ,  $B(6; 0)$  és  $C(0; 8)$ .

b) Igazolja, hogy a  $3x - 4y = -12$  egyenletű  $e$  egyenes felezi az  $ABC$  háromszög kerületét és területét is!

a)	6 pont	
b)	10 pont	
Ö.:	16 pont	

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--



--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

**Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.  
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!**

7. Öt különböző számjegyet leírunk egy papírlapra. Két számjegyet pontosan akkor kötünk össze egy vonallal (élel), ha a különbségük páros szám (de egyik számjegyet sem kötjük össze önmagával). Így egy ötpontú gráfot kapunk.

- a) Határozza meg az alábbi két állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)!

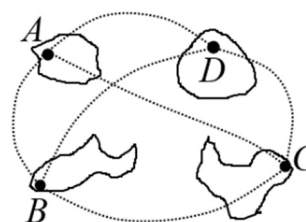
Válaszát indokolja!

**I.** Lehetséges, hogy fagráfot kapunk.

**II.** Lehetséges, hogy nem összefüggő gráfot kapunk.

Az Óceán Légitársaságnak a megalakulása óta alapelve, hogy a szigetvilágban működő hálózatának bármely két célállomása között működtet repülőjáratot. (Az *ábra* azt a több évvel ezelőtti időszakot szemlélteti, amikor még csak négy célállomás és hat repülőjárat volt.)

A hálózatot folyamatosan bővítik: az utóbbi két év alatt a célállomások száma másfélszeresére nőtt, ugyanezen idő alatt a repülőjáratok száma pedig 60-nal lett több.



- b) Hány célállomásra közlekednek jelenleg?

A légitársaság vezetőségi értekezletén megállapították, hogy az 1-es számú járatukon legfeljebb 168 utasnak van hely, de minden alkalommal sokkal többen szeretnének jegyet váltani. Több év tapasztalatai szerint 0,032 annak a valószínűsége, hogy erre a járatra valaki megveszi a jegyet, de aztán valamilyen ok miatt mégsem jelenik meg a járat indulásánál. Emiatt a vezetőség úgy dönt, hogy erre a 168 fős járatra ezentúl 170 jegyet adnak el. Az érvényes szabályozás szerint a több jegy eladása miatt a járatról esetleg lemaradó utasoknak a légitársaság fejenként 600 euró kártérítést köteles fizetni.

- c) Ha a vezetőség megállapításai helyesek, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy az 1-es számú járat egy indulásánál legfeljebb 168 utas jelenik meg, és mennyi a társaság által fizetendő kártérítés várható értéke a járat egy útját tekintve?

a)	4 pont	
b)	7 pont	
c)	5 pont	
<b>Ö.:</b>	16 pont	



--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

---

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

**Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.  
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!**

- 8.** A *szókereső* mobiltelefonos játékban a megtalált szó hossza (vagyis a szót alkotó betűk száma) határozza meg a játékosnak adott pontszámot. Egybetűs szóért nem jár pont, kétbetűs szóért 1 pont jár. Ha  $n \geq 3$ , akkor az  $n$  betűből álló szó megtalálásáért  $\frac{n^2 - 5n + 10}{2}$  pontot kap a játékos.<sup>1</sup>
- a) Van-e olyan szó, amelyért 26 pontot kap a játékos? Válaszát indokolja!
- b) Igazolja, hogy a játékszabály szerint a hosszabb szóért több pont jár, és hogy csak egész pontszámot kaphat a játékos!
- c) Igazolja, hogy ha  $m$  tetszőleges természetes szám, akkor a játékos kaphat  $2 + \frac{m(m+1)}{2}$  pontot! (A leírt játékszabály nem korlátozza a szavak hosszát, ezért feltehetjük, hogy tetszőleges hosszúságú „szó” létezik.)

<b>a)</b>	3 pont	
<b>b)</b>	6 pont	
<b>c)</b>	7 pont	
<b>Ö.:</b>	16 pont	

<sup>1</sup> <https://play.google.com/store/apps/details?id=words.gui.android&hl=hu>

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

---

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

**Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.  
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!**

9. a) Hány olyan 1000-nél kisebb  $p$  pozitív egész szám van, amelyre a  $p$  és a 42 relatív prímek?

Az alábbi táblázatban egy végtelen szorzótábla részletét látjuk.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	
...										...

A fehér, illetve szürke színű „L alakú” sávokban lévő számok összege:

$$L_1 = 1,$$

$$L_2 = 2 + 4 + 2 = 8,$$

$$L_3 = 3 + 6 + 9 + 6 + 3 = 27, \dots$$

- b) Igazolja, hogy  $L_n = n^3$ .

- c) Igazolja, hogy az első  $n$  pozitív köbszám összege

$$K_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

a)	6 pont	
b)	4 pont	
c)	6 pont	
Ö.:	16 pont	

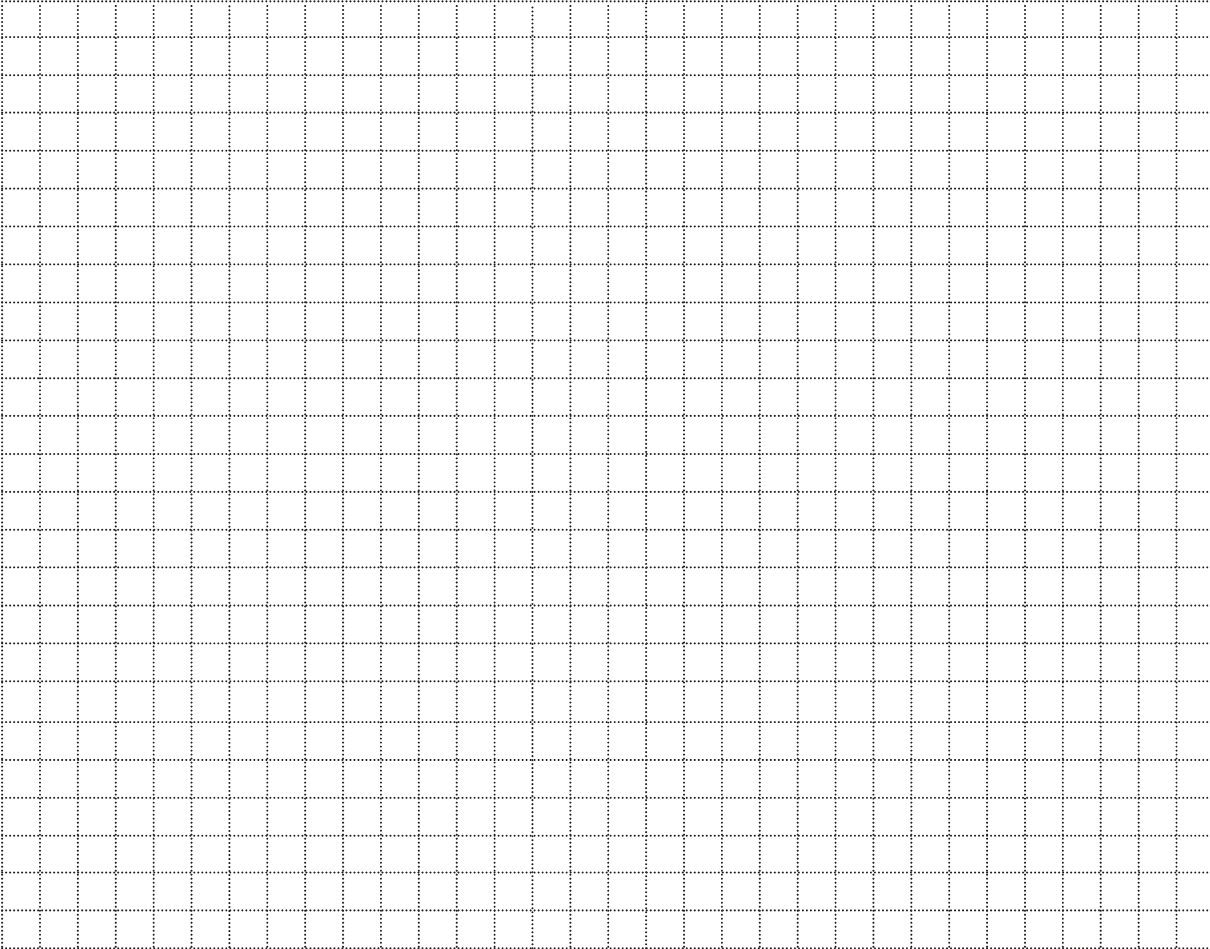
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

---

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

---

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--



--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

	a feladat sor- száma	pontszám			
		maximális	elért	maximális	elért
I. rész	1.	14		<b>51</b>	
	2.	13			
	3.	13			
	4.	11			
II. rész		16		<b>64</b>	
		16			
		16			
		16			
		← nem választott feladat			
<b>Az írásbeli vizsgarész pontszáma</b>				<b>115</b>	

\_\_\_\_\_ dátum

\_\_\_\_\_ javító tanár

	pontszáma <b>egész számra</b> kerekítve	
	elért	programba beírt
I. rész		
II. rész		

\_\_\_\_\_ dátum

\_\_\_\_\_ dátum

\_\_\_\_\_ javító tanár

\_\_\_\_\_ jegyző